A calculator will provide the eigenvalues $\lambda = 2,\ 2,\ 1,\ 0$, so we can reconstruct the characteristic polynomial as

Una calculadora dara los valores propios $\lambda = 2,\ 2,\ 1,\ 0$, y con ésto podemos construis el polin-iomio caracteristico que es

$$\boldsymbol{pA}(x) = (x-2)^2(x-1)x$$

so the algebraic multiplicities of the eigenvalues are

entonces las multiplicidades algebraicas de los valores propios son

$$\alpha_A(2) \ = 2 \quad \alpha_A(1) \ = 1 \quad \alpha_A(0) \ = 1$$

Now compute eigenspaces by hand, obtaining null spaces for each of the three eigenvalues by constructing the correct singular matrix (⟨acronymref|theorem|EMNS⟩),

Ahora calculamos los espacios propios a mano, obtieniendo los spacios nulos para tres de los val-ores propios para construis la correcta matriz singular (⟨acronymref|theorem|EMNS⟩),

$$A - 2I_4 = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 9 & 24 \\ -3 & -29 & -29 & -68 \\ 1 & 11 & 11 & 26 \\ 1 & 7 & 7 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_A(2) = \mathcal{N}(A - 2I_4) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$A - 1I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 & 24 \\ -3 & -28 & -29 & -68 \\ 1 & 11 & 12 & 26 \\ 1 & 7 & 7 & 17 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_A(1) = \mathcal{N}(A - I_4) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{13}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$A - 0I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 & 24 \\ -3 & -27 & -29 & -68 \\ 1 & 11 & 13 & 26 \\ 1 & 7 & 7 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_A(0) = \mathcal{N}(A - I_4) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

From this we can compute the dimensions of the eigenspaces to obtain the geometric multiplici-ties,

Con ésto podemos calcular las dimension de los espacios propios para obtener la multiplicidad geometrica

$$\gamma_A(2)\ = 2\quad \gamma_A(1)\ = 1\quad \gamma(0) = 1$$

For each eigenvalue, the algebraic and geometric multiplicities are equal and so by ⟨acronymref|theorem|DMFE⟩ we now know that A is diagonalizable. The construction in ⟨acronymref|theorem|DC⟩ suggests we form a matrix whose columns are eigenvectors of A.

Para cada valor propio, la multiplicidad algebraica y geometrica son iguales y por ⟨acronymref|theorem|DMFE⟩ sabemos que A es diagonalizable. La construcción en ⟨acronymref|theorem|DC⟩ nos aconseja formar la matriz que tenga como columanas los vectores propios de A.

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 & 3 \\ -5 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Since $\det(S) = -1 \neq 0$, we know that S is nonsingular (⟨acronymref|theorem|SMZD⟩), so the columns of S are a set of 4 linearly independent eigenvectors of A. By the proof of ⟨acronymref|theorem|SMZD⟩ we know

Desde $\det(S) = -1 \neq 0$, sabemos que S es no singular (⟨acronymref|theorem|SMZD⟩), asi las columnas de S son el conjunto de 4 vectores propios de A linealmente independientes. Por la prueba de ⟨acronymref|theorem|SMZD⟩ sabemos que

$$S^{-1}\mathrm{AS} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a diagonal matrix with the eigenvalues of A along the diagonal, in the same order as the associated eigenvectors appear as columns of S.

una matriz diagonal con los valores propios de A en toda la diagonal, en el mismo orden como los vectores propios asociados como las columnas de S.

Contributed by Robert Beezer

Contribuido por Robert Beezer

Traducido por Jhonatan Ruas